

Посвящается светлой памяти
Н. М. Коробова.

УДК 511.321 + 511.31

Усиление теоремы Бургейна — Конторовича - IV (A strengthening of a theorem of Bourgain-Kontorovich-IV)

И. Д. Кан (I. D. Kan)*

Аннотация

Zaremba's conjecture (1971) states that every positive integer number d can be represented as a denominator of a finite continued fraction $\frac{b}{d} = [d_1, d_2, \dots, d_k]$, with all partial quotients d_1, d_2, \dots, d_k being bounded by an absolute constant A . Several new theorems concerning this conjecture were proved by Bourgain and Kontorovich in 2011. The easiest of them states that the set of numbers satisfying Zaremba's conjecture with $A = 50$ has positive proportion in \mathbb{N} . In 2014 I. D. Kan and D. A. Frolenkov proved this result with $A = 5$. In this paper the same theorem is proved with $A = 4$.

Bibliography: 13 titles.

Keywords: continued fraction, Zaremba's conjecture, exponential sums.

Аннотация

В настоящей работе доказывается, что почти все натуральные числа являются знаменателями тех конечных цепных дробей, все неполные частные которых принадлежат алфавиту $\{1, 2, 3, 4\}$. Ранее аналогичная теорема была известна лишь для алфавитов большей мощности. Именно, впервые результат такого рода для алфавита $\{1, 2, \dots, 50\}$ получили в 2011 году Бургейн и Конторович. Далее, в 2013 году автор статьи совместно с Д. А. Фроленковым доказали теорему для алфавита $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Результат автора 2014 года, предшествующий настоящему, относился к алфавиту $\{1, 2, 3, 4, 10\}$.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова и выражения: цепная дробь, тригонометрическая сумма, гипотеза Зарембы.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 15-01-05700 А)

1 История вопроса

Через $[d_1, d_2, \dots, d_k]$ обозначена конечная цепная дробь

$$[d_1, d_2, \dots, d_k] = \frac{1}{d_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{d_k}}} \quad (1.1)$$

с натуральными неполными частными d_1, d_2, \dots, d_k (где k — натуральное), а через $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$ — множество рациональных чисел $\frac{b}{d}$, представимых конечными цепными дробями с неполными частными из некоторого конечного алфавита $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}} = \left\{ \frac{b}{d} = [d_1, d_2, \dots, d_k] \mid d_j \in \mathcal{A} \text{ для } j = 1, \dots, k \right\}.$$

Через $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$ обозначено множество знаменателей d чисел $\frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$, а через $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N)$ — множество таких знаменателей, ограниченных сверху числом $N \in \mathbb{N}$:

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} = \left\{ d \in \mathbb{N} \mid \exists b : \gcd(b, d) = 1, \frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}} \right\}, \quad \mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N) = \left\{ d \in \mathfrak{D}_{\mathcal{A}} \mid d \leq N \right\}.$$

Гипотеза 1.1. (Гипотеза Зарембы [3]). Существует константа A (скорее всего, $A = 5$), такая что для любого $N \in \mathbb{N}$ для алфавита

$$\mathcal{A} = 1, 2, \dots, A \quad (1.2)$$

имеет место равенство $|\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N)| = N$.

Обзор результатов, связанных с гипотезой 1.1, можно найти в работах [1],[4].

Для фиксированного алфавита \mathcal{A} число d называется допустимым [1], если для любого $q > 1$ множество $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$ содержит число, сравнимое с d по модулю q . Множество допустимых чисел обозначено через $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}$. Пусть $\delta_{\mathcal{A}}$ — хаусдорфова размерность множества бесконечных цепных дробей с неполными частными из алфавита \mathcal{A} . Бургейн и Конторович в 2011 году доказали, в частности, следующее.

Теорема 1.1. [1, теорема 1.25]. Для каждого алфавита \mathcal{A} , такого что

$$\delta_{\mathcal{A}} > \frac{307}{312} = 0.9839\dots, \quad (1.3)$$

справедливо неравенство (“положительная пропорция”):

$$|\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N)| \gg N. \quad (1.4)$$

Теорема 1.2. [1, теорема 1.27]. Для каждого алфавита \mathcal{A} , удовлетворяющего условию (1.3), существует подмножество $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$, содержащее почти все допустимые числа. То есть, найдется константа $c = c(\mathcal{A}) > 0$, такая что

$$\frac{|\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{A}} \cap [\frac{N}{2}, N]|}{|\mathfrak{A}_{\mathcal{A}} \cap [\frac{N}{2}, N]|} = 1 + O\left(\exp\left\{-c\sqrt{\log N}\right\}\right). \quad (1.5)$$

Следовательно, равенство (1.5) имеет место при замене $\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{A}}$ на $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$. Кроме того, каждое число $d \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{A}}$ появляется с кратностью

$$\gg N^{2\delta_{\mathcal{A}} - 1.001}. \quad (1.6)$$

Далее теорема 1.1 усиливалась в работах [6] — [9], а теорема 1.2 — в работах [11] и [10]. (Конечно, теорема 1.1 следует из теоремы 1.2, но допускает также и более простое доказательство.) В частности, в работе [10] было доказано, что в теоремах 1.1 и 1.2 неравенство (1.3) можно заменить более слабым условием $\delta_{\mathcal{A}} > 0.8$, которому удовлетворяют все алфавиты вида $\{1, 2, 3, 4, n\}$ при n , принимающем любое из значений $6, \dots, 10$.

Некоторый условный результат по проблеме имеется также в работе [13].

2 Основные результаты работы

В настоящей статье имеется две основных теоремы.

Теорема 2.1. *Для произвольного алфавита \mathcal{A} , такого что*

$$\delta_{\mathcal{A}} > \frac{11}{14} = 0.7857\dots, \quad (2.1)$$

справедливо неравенство $|\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N)| \gg N$.

Теорема 2.2. *Пусть алфавит \mathcal{A} удовлетворяет неравенству (2.1). Тогда существует константа $c = c(\mathcal{A}) > 0$, такая что имеют место формулы (1.5) и (1.6).*

Замечание 2.1. *Согласно результатам Дженкинсона [2], неравенству (2.1) удовлетворяет алфавит (1.2) при $A = 4$.*

3 Обозначения

Всюду далее $\varepsilon_0 \in (0, 0.0004)$ — произвольно малая положительная константа, участвующая в построении ансамбля $\Omega^{(N)} = \Omega^{(N, \varepsilon_0)}$. Знак Виноградова $f(N) \ll g(N)$ для двух произвольных функций $f(N)$ и $g(N)$ обозначает существование константы C , зависящей только от \mathcal{A} и ε_0 , такой что $|f(N)| \leq Cg(N)$. Также используются традиционные обозначения $e(x) = \exp(2\pi i x)$, $e_n(x) = \exp\left(\frac{2}{n}\pi i x\right)$. Наибольший общий делитель двух целых чисел a и b обозначается через $\gcd(a, b)$. Для натурального n и целого m

$$\delta_n(m) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_n(km) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ делится на } n, \\ 0, & \text{— в противном случае,} \end{cases} \quad (3.1)$$

— δ -символ Коробова (в честь Н. М. Коробова, пропагандировавшего идею использования формулы (3.1), см. [5]). Мощность конечного множества S обозначается через $|S|$. Для действительного числа α через $[\alpha], \{\alpha\}$ и $\|\alpha\|$ обозначаются, соответственно, целая часть от α , дробная доля α и расстояние от α до ближайшего целого:

$$[\alpha] = \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq \alpha\}, \quad \{\alpha\} = \alpha - [\alpha], \quad \|\alpha\| = \min \{\{\alpha\}, \{-\alpha\}\}.$$

Кроме того, если g — матрица, то $\|g\|$ — ее норма (определенная ниже в параграфе 5).

4 Благодарности

Автор благодарит профессора Н. Г. Мощевитина за постановку задачи и неоднократное обсуждение темы статьи. Также автор благодарен Д. А. Фроленкову за многократное обсуждение и многие полезные советы.

5 Основные свойства ансамбля $\Omega^{(N)}$

Через $\Gamma_{\mathcal{A}}$ обозначена мультипликативная полугруппа $\Gamma_{\mathcal{A}} \subseteq SL(2, \mathbb{Z})$ с единицей $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, порожденная матрицами $\begin{pmatrix} 1 & v \\ u & uv+1 \end{pmatrix}$, где $u, v \in \mathcal{A}$. Для четного k и чисел $d_1, d_2, \dots, d_k \in \mathcal{A}$ в качестве нормы произвольной матрицы $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{\mathcal{A}}$, такой что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ d_1 & d_1 d_2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_4 \\ d_3 & d_3 d_4 + 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & d_k \\ d_{k-1} & d_{k-1} d_k + 1 \end{pmatrix},$$

рассматривается, как обычно ([8] — [10]), величина $\|g\| = d = \langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle$ — знаменатель цепной дроби (1.1), не сократимый с ее числителем.

Скажем, что для некоторого множества $\Omega \subseteq \Gamma_{\mathcal{A}}$ имеет место разложение

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \dots \Omega_n \quad (5.1)$$

на независимые множители $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n \subseteq \Gamma_{\mathcal{A}}$, если для каждой матрицы $g \in \Omega$ найдется, причем единственный, набор матриц $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$, таких что $g_i \in \Omega_i$ для $i = 1, 2, 3, \dots, n$ и выполнено равенство

$$g = g_1 g_2 g_3 \dots g_n.$$

Конечно, при этом выполняется равенство $|\Omega| = |\Omega_1| |\Omega_2| |\Omega_3| \dots |\Omega_n|$.

Всюду далее будем использовать обозначения $A = \max \mathcal{A}$, $Q_1 = \lceil \exp(A^4 \varepsilon_0^{-5}) \rceil + 1$. Положим $Q_0 = 0$ и определим последовательность $\{Q_j\}$ для j от нуля до бесконечности:

$$\{Q_j\}_{j=0}^{\infty} = \{0, Q_1, Q_1^2, Q_1^3, \dots, Q_1^j, \dots\}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим две произвольных матрицы $g_2 \in \Omega_2$, $g_4 \in \Omega_4$, три параметра $M_1, M^{(2)}, M^{(4)} \in \mathbb{R}_+$ и следующие два неравенства:

$$\frac{M^{(2)}}{150A^2(M_1)^{2\varepsilon_0}} \leq \|g_2\| \leq 73A^2 M^{(2)} (M_1 M^{(2)})^{2\varepsilon_0}, \quad (5.3)$$

$$\frac{(M^{(4)})^{1-\varepsilon_0}}{150A^2} \leq \|g_4\| \leq 73A^2 M^{(4)}. \quad (5.4)$$

По достаточно большому числу N и по малому параметру $\varepsilon_0 \in (0, 0.0004)$ в [8] было построено специальное множество матриц — ансамбль (см. терминологию в [1])

$$\Omega^{(N)} = \Omega^{(N, \varepsilon_0)} \subseteq \left\{ g \in \Gamma_{\mathcal{A}} \mid \|g\| \leq 1, 02N \right\},$$

для которого имеет место разложение на независимые множители (5.1) с $n = 4$ со свойствами, перечисленными в следующей лемме.

Лемма 5.1. [10, теорема 6.1] *Существует непустое множество матриц — ансамбль $\Omega^{(N)} \subseteq \Gamma_{\mathcal{A}}$, такое что для всякого $M_1 \in [Q_1, N]$ найдется разложение*

$$\Omega^{(N)} = \Omega_1 \Omega \quad (5.5)$$

на независимые множители Ω_1 и Ω , для которых выполнен ряд свойств:

во-первых, имеет место оценка

$$|\Omega_1| \gg (M_1)^{2\delta_A - \varepsilon_0}, \quad (5.6)$$

во-вторых, для любых двух матриц $g_1 \in \Omega_1$ и $g \in \Omega$ выполняются неравенства

$$\frac{M_1}{70A^2} \leq \|g_1\| \leq 1.01(M_1)^{1+2\varepsilon_0}, \quad \frac{N}{160A^2(M_1)^{1+2\varepsilon_0}} \leq \|g\| \leq 73A^2 \frac{N}{M_1}, \quad (5.7)$$

в-третьих, для произвольных действительных чисел $M^{(2)}, M^{(4)} \in [Q_1, N] \cup \{1\}$, удовлетворяющих неравенству

$$M_1 M^{(2)} M^{(4)} \leq N, \quad (5.8)$$

найдется разложение множества Ω вида

$$\Omega = \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4 \quad (5.9)$$

на независимые множители $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, для которых выполнены как неравенства

$$|\Omega_2| \gg (M^{(2)})^{2\delta_A} (M_1 M^{(2)})^{-2\varepsilon_0}, \quad |\Omega_4| \gg (M^{(4)})^{2\delta_A - 2\varepsilon_0}, \quad (5.10)$$

так и оценки (5.3), (5.4) — для любых двух матриц $g_2 \in \Omega_2$, $g_4 \in \Omega_4$. В частности, если $M^{(2)} = 1$ или $M^{(4)} = 1$, то $\Omega_2 = \{E\}$ или $\Omega_4 = \{E\}$, соответственно.

Пусть число $M_1 \in [Q_1, N]$ уже как-либо выбрано, так что имеет место разложение (5.5) со свойствами (5.6) и (5.7). В этом случае множество Ω из (5.5) будем называть полуансамблем. Если имеет место разложение (5.9), то для любых двух элементов $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ полуансамбля Ω введем обозначения

$$g^{(1)} = g_2^{(1)} g_3^{(1)} g_4^{(1)}, \quad g^{(2)} = g_2^{(2)} g_3^{(2)} g_4^{(2)},$$

где нижний индекс i ($i = 2, 3, 4$) указывает на принадлежность соответствующему множеству Ω_i . Далее, если X — некоторое множество 2×2 -матриц g , то \tilde{X} — множество вектор-столбцов $\tilde{g} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для координат трех пар произвольных векторов

$$\tilde{g}^{(1)}, \tilde{g}^{(2)} \in \tilde{\Omega}, \quad \tilde{g}_2^{(1)}, \tilde{g}_2^{(2)} \in \tilde{\Omega}_2, \quad \tilde{g}_4^{(1)}, \tilde{g}_4^{(2)} \in \tilde{\Omega}_4$$

введем такие обозначения:

$$\tilde{g}^{(1)} = \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}^{(2)} = \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} x_2 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} y_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_4^{(1)} = \begin{pmatrix} x_4 \\ X_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_4^{(2)} = \begin{pmatrix} y_4 \\ Y_4 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Пусть $M_2, M_4 \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим неравенства

$$\frac{M_2(M_1 M_2)^{-6\varepsilon_0}}{Q_5} \leq \|g_2\| \leq M_2, \quad \frac{(M_4)^{1-\varepsilon_0}}{Q_5} \leq \|g_4\| \leq M_4. \quad (5.12)$$

Свойства полуансамбля Ω из леммы 5.1 несколько уточняет следующая

Теорема 5.1. Для любого числа $M_1 \in [Q_1, N]$ найдется непустое множество матриц — полуансамбль $\Omega \subseteq \Gamma_A$, такое что для произвольного числа $M_2 \geq 1$, удовлетворяющего неравенству $M_1 M_2 \leq Q_3 N$, найдется разложение вида $\Omega = \Omega_2 \Omega_{3,4}$ на независимые множители Ω_2 и $\Omega_{3,4}$, для которых выполнен ряд свойств:

(i) имеет место неравенство

$$|\Omega_2| \gg (M_2)^{2\delta_A} (M_1 M_2)^{-10\epsilon_0}, \quad (5.13)$$

(ii) для любой матрицы $g_2 \in \Omega_2$ имеет место первая из оценок (5.12): в частности, в обозначениях (5.11) выполнено неравенство $\max\{X_2, Y_2\} \leq M_2$,

(iii) для любого числа $M_4 \geq 1$, удовлетворяющего неравенству

$$M_1 M_2 M_4 \leq Q_6 N, \quad (5.14)$$

найдется разложение множества $\Omega_{3,4}$ вида $\Omega_{3,4} = \Omega_3 \Omega_4$ на независимые множители Ω_3 и Ω_4 , такие что выполнены как неравенство

$$|\Omega_4| \gg (M_4)^{2\delta_A - 2\epsilon_0}, \quad (5.15)$$

так и вторая из оценок (5.12) — для любой матрицы $g_4 \in \Omega_4$: в частности,

$$\max\{X_4, Y_4\} \leq M_4. \quad (5.16)$$

Доказательство. Пусть выбраны значения величин M_2 и M_4 , удовлетворяющих условиям теоремы. Тогда, используя обозначения (5.2), положим:

$$\mathcal{M}^{(2)} = \frac{M_2}{Q_3} (M_1 M_2)^{-4\epsilon_0}, \quad \mathcal{M}^{(4)} = \frac{M_4}{Q_3}.$$

Участвующие в лемме 5.1 величины $M^{(2)}$ и $M^{(4)}$ определим правилами:

$M^{(2)} = \mathcal{M}^{(2)}$, если $\mathcal{M}^{(2)} \geq Q_1$, и $M^{(2)} = 1$ — в противном случае; аналогично,

$M^{(4)} = \mathcal{M}^{(4)}$, если $\mathcal{M}^{(4)} \geq Q_1$, и $M^{(4)} = 1$ — в противном случае.

Тогда числа $M^{(2)}$ и $M^{(4)}$ принадлежат множеству $[Q_1, N] \cup \{1\}$. Кроме того, если $M^{(2)} = 1$ или $M^{(4)} = 1$, то, полагая $\Omega_2 = \{E\}$ или $\Omega_4 = \{E\}$, соответственно, получаем, что все требуемые неравенства выполнены. Если же равенства $M^{(2)} = 1$ или $M^{(4)} = 1$ не выполнены, то, следовательно, для чисел $M^{(2)}$ или $M^{(4)}$ справедливы равенства $M^{(2)} = \mathcal{M}^{(2)}$ или $M^{(4)} = \mathcal{M}^{(4)}$. Для таких значений условие (5.8) леммы 5.1 выполнено ввиду неравенства (5.14). Поэтому доказаны оценки (5.3), (5.4) и (5.10). Подставляя в них значения $M^{(2)}$ и $M^{(4)}$, получаем неравенства (5.12), (5.13) и (5.15). Теорема доказана.

Отметим, что далее довольно часто в качестве значений M_2 и M_4 выбираются числа

$$M_2 = 1, \quad M_4 = \max \left\{ 1, \frac{1}{2} Q_{\alpha-1} \right\}, \quad (5.17)$$

где $\alpha \in \mathbb{N}$. В этом случае для проверки оценки (5.14) достаточно установить неравенство

$$M_1 Q_\alpha \leq Q_6 N, \quad (5.18)$$

гарантирующее выполнение условий теоремы для числа $M_1 \in [Q_1, N]$.

6 Основа доказательства формул (1.4) — (1.6).

Напомним обозначения из [10]. Применяя теорему Дирихле [12, лемма 2.1, стр. 17], для каждого $\Theta \in [0, 1)$ найдем целые числа a , q и l и действительное число λ , такие что

$$\Theta = \left\{ \frac{a}{q} + \frac{l}{2N} + \frac{\lambda}{N} \right\}, \quad \gcd(a, q) = 1, \quad 0 \leq a < q \leq \frac{\sqrt{N}}{Q_1}, \quad \lambda \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right], \quad |l| \leq \frac{3}{q} Q_1 \sqrt{N}, \quad (6.1)$$

при чем равенство $a = 0$ возможно только при $q = 1$. Фиксируем константу $T_1 = 7Q_7$ (где Q_7 — элемент последовательности (5.2)) и целое число $\kappa \in [0, T_1 - 1]$. Для целых $\alpha, \beta \geq 1$ рассмотрим числа Θ из (6.1), удовлетворяющие соотношениям

$$l \equiv \kappa \pmod{T_1}, \quad Q_{\alpha-1} < q \leq Q_\alpha, \quad Q_{\beta-1} \leq |l| \leq Q_\beta, \quad (6.2)$$

и положим

$$P_{\alpha,\beta} = P_{\alpha,\beta}^{(\lambda)}(\kappa) = \left\{ \Theta \mid \text{выполнены (6.1) и (6.2)} \right\}.$$

Всюду далее Z — произвольное непустое подмножество конечного множества $P_{\alpha,\beta}$, которое предполагается непустым. Положим также

$$\sigma_{N,Z} = \sum_{\Theta \in Z} \left| \sum_{g \in \Omega^{(N)}} e((0, 1) \tilde{g} \Theta) \right|.$$

С помощью метода Хуанга [11] (обобщившего методы Бургейна — Конторовича [1] и других [9]) в [10] была доказана следующая

Лемма 6.1. ([10, теорема 7.1]) Пусть найдется не зависящая от ε_0 константа $c = c(\mathcal{A}) > 0$, такая что выполняется оценка

$$\sigma_{N,Z} \ll \frac{|\Omega^{(N)}| \sqrt{|Z|}}{(Q_\alpha Q_\beta)^{c+O(\varepsilon_0)}}. \quad (6.3)$$

Тогда для алфавита \mathcal{A} имеют место формулы (1.4) — (1.6).

Для двух произвольных чисел $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)} \in Z \subseteq P_{\alpha,\beta}$ введем обозначения

$$\Theta^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} + \frac{l^{(1)}}{2N} + \frac{\lambda}{N}, \quad \Theta^{(2)} = \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} + \frac{l^{(2)}}{2N} + \frac{\lambda}{N} \quad (6.4)$$

и положим

$$\mathbf{p} = \gcd(q^{(1)}, q^{(2)}), \quad \mathbf{q} = \frac{1}{\mathbf{p}} q^{(1)} q^{(2)}. \quad (6.5)$$

Следовательно, полагая $q_0^{(1)} = \frac{1}{\mathbf{p}} q^{(1)}$, $q_0^{(2)} = \frac{1}{\mathbf{p}} q^{(2)}$, получим $\mathbf{q} = \mathbf{p} q_0^{(1)} q_0^{(2)}$.

Далее, напомним обозначения (5.11) и обозначим через t и T числители дробей

$$\left\| x \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - y \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\| = \frac{t}{\mathbf{q}}, \quad \left\| X \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - Y \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\| = \frac{T}{\mathbf{q}}.$$

Другими словами,

$$\begin{aligned} \left| x a^{(1)} q_0^{(2)} - y a^{(2)} q_0^{(1)} \right| &\equiv t \pmod{\mathbf{p} q_0^{(1)} q_0^{(2)}}, \quad 0 \leq t < \mathbf{q}, \\ \left| X a^{(1)} q_0^{(2)} - Y a^{(2)} q_0^{(1)} \right| &\equiv T \pmod{\mathbf{p} q_0^{(1)} q_0^{(2)}}, \quad 0 \leq T < \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Рассмотрим неравенства

$$\frac{t}{\mathbf{q}} \leq \min \left\{ \frac{1}{M_1} 74A^2 Q_\beta, \quad \frac{1}{N} 150A^3 x + \left\| \frac{1}{2N} (xl^{(1)} - yl^{(2)}) \right\| + \left\| \frac{\lambda}{N} (x - y) \right\| \right\}, \quad (6.7)$$

$$\frac{T}{\mathbf{q}} \leq \min \left\{ \frac{1}{M_1} 74A^2 Q_\beta, \quad \frac{1}{N} 150A^3 X + \left\| \frac{1}{2N} (Xl^{(1)} - Yl^{(2)}) \right\| + \left\| \frac{\lambda}{N} (X - Y) \right\| \right\}, \quad (6.8)$$

$$|xl^{(1)} - yl^{(2)}| \leq (9A)^5 x + 2N \frac{t}{\mathbf{q}}, \quad |Xl^{(1)} - Yl^{(2)}| \leq (9A)^5 X + 2N \frac{T}{\mathbf{q}}. \quad (6.9)$$

Введем также обозначения

$$\mathfrak{N} = \left\{ (\tilde{g}^{(1)}, \tilde{g}^{(2)}, \Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) \in \tilde{\Omega}^2 \times Z^2 \mid \text{выполнены неравенства (6.4) — (6.9)} \right\},$$

$$\mathfrak{N}(\mathbf{p}, t, T) = \left\{ (\tilde{g}^{(1)}, \tilde{g}^{(2)}, \Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) \in \mathfrak{N} \mid \text{значения параметров } \mathbf{p}, t, T \text{ фиксированы} \right\}.$$

Лемма 6.2. ([10, см. лемму 8.5]). Если выполнено неравенство

$$75A^2 Q_\alpha Q_\beta \leq M_1 \leq \min \left\{ (Q_\alpha Q_\beta)^5, \quad \frac{N}{\sqrt{Q_\alpha Q_\beta}} \right\}, \quad (6.10)$$

то имеет место оценка

$$\sigma_{N,Z} \ll (M_1)^{1+2\varepsilon_0} \sqrt{|\Omega_1| |\mathfrak{N}|}. \quad (6.11)$$

Доказательство. Для получения оценки (6.11) из аналогичного неравенства работы [10] временно положим

$$\Omega_2 = \Omega_3 = \{E\}, \quad \Omega_4 = \Omega, \quad (6.12)$$

тогда знак суммы по множеству Ω_3 теперь не нужен, и неравенство (6.11) при выполнении условий (6.12) доказано. Теперь покажем, что от выбора параметров (6.12) можно отказаться. Действительно, для этого достаточно применить теорему 5.1 еще раз, полагая $\Omega = \Omega_4$ и придавая обозначениям $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ другие значения. Лемма доказана.

Далее для краткости $\delta_{\mathcal{A}}$ обозначается через δ .

Теорема 6.1. Пусть найдется такая не зависящая от ε_0 константа $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathcal{A}) > 0$, при которой для любых натуральных значений α и β существует число $M_1 = M_1(\alpha, \beta)$ из интервала (6.10), такое что

$$\frac{|\mathfrak{N}|}{|Z||\Omega|^2} \ll (M_1)^{-2+2\delta-\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}. \quad (6.13)$$

Тогда для алфавита \mathcal{A} имеют место формулы (1.4) — (1.6).

Доказательство. Ввиду неравенств (5.6) и (6.13), с помощью леммы 6.2 легко получить оценку (6.3). Теперь утверждение теоремы следует из леммы 6.1. Теорема доказана.

Здесь и далее $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathcal{A}) > 0$ — произвольная достаточно малая не зависящая от ε_0 константа, о которой будет доказано неравенство (6.13). Можно, для определенности, считать, что $\mathbf{c} = 0.001 \left(\delta - \frac{11}{14} \right)$, но это равенство нигде не будет использовано.

7 Оценка величины $|\mathfrak{N}|$ суммой мощностей множеств

Напомним обозначения (5.11), (6.4) и (6.6) и обозначим:

$$\mathfrak{M} = \left\{ (\tilde{g}^{(1)}, \tilde{g}^{(2)}, \Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) \in \mathfrak{N} \mid T = t = 0 \right\}.$$

Тогда, ввиду (6.9), на всех элементах множества \mathfrak{M} выполнены неравенства

$$|xl^{(1)} - yl^{(2)}| \leq (9A)^5 x, \quad |Xl^{(1)} - Yl^{(2)}| \leq (9A)^5 X. \quad (7.1)$$

Замечание 7.1. В работе [1, пп. 6.2.1] (см. также [8, доказательство леммы 14.1]) было показано, что условие $T = t = 0$ равносильно следующему:

$$q^{(1)} = q^{(2)} = \mathbf{q} = \mathbf{p}, \quad xa^{(1)} \equiv ya^{(2)} \pmod{\mathbf{q}}, \quad Xa^{(1)} \equiv Ya^{(2)} \pmod{\mathbf{q}}. \quad (7.2)$$

Кроме того, при фиксированном значении $l^{(2)}$ величина $l^{(1)}$ определяется из любого из неравенств (7.1) не более, чем некоторой константой способов.

Следуя методу Бургейна — Конторовича, полагается свести оценку мощности множества \mathfrak{N} к оценке величины $|\mathfrak{M}|$. Для этого необходимо выявить условия, при выполнении которых гарантируется равенство $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$. В прежних работах на эту тему ([6] — [10], [11]) проводились построения именно в таком ключе. В настоящей работе рассматривается также ряд случаев, когда равенство $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ не выполняется.

Прежде всего, введем обозначения

$$\mathbf{P} = \frac{74A^2 Q_\alpha^2 Q_\beta}{M_1}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{p}) = \left\lfloor \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{p}} \right\rfloor, \quad \mathfrak{M}_0 = \sum_{1 \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{P}} \sum_{0 \leq t, T \leq \mathbf{T}} |\mathfrak{N}(\mathbf{p}, t, T)|. \quad (7.3)$$

Лемма 7.1. Если выполнено неравенство (6.10), то имеет место оценка

$$|\mathfrak{N}| \leq |\mathfrak{M}| + \mathfrak{M}_0. \quad (7.4)$$

Доказательство. Ввиду первых элементов минимумов в правых частях неравенств (6.7) и (6.8), имеют место неравенства $t, T \leq \mathbf{T}$. Следовательно, разбивая множество \mathfrak{N} на ряд составляющих его подмножеств, имеем:

$$|\mathfrak{N}| \leq \sum_{1 \leq \mathbf{p} \leq Q_\alpha} \sum_{0 \leq t, T \leq \mathbf{T}} |\mathfrak{N}(\mathbf{p}, t, T)|. \quad (7.5)$$

Выделяя в (7.5) слагаемое с $t = T = 0$, приходим к неравенству

$$|\mathfrak{N}| \leq \sum_{1 \leq \mathbf{p} \leq Q_\alpha} |\mathfrak{N}(\mathbf{p}, 0, 0)| + \sum_{1 \leq \mathbf{p} \leq Q_\alpha} \sum_{\substack{0 \leq t, T \leq \mathbf{T} \\ t^2 + T^2 \neq 0}} |\mathfrak{N}(\mathbf{p}, t, T)|.$$

Но, поскольку выполнены равенства $\mathfrak{N}(\mathbf{p}, 0, 0) = \mathfrak{M}$ при $\mathbf{p} = q^{(1)} = q^{(2)}$ и $|\mathfrak{N}(\mathbf{p}, 0, 0)| = 0$ — в остальных случаях [1, пп. 6.2.1] (см. также [8, доказательство леммы 14.1]), то

$$|\mathfrak{N}| \leq |\mathfrak{M}| + \sum_{1 \leq \mathbf{p} \leq Q_\alpha} \sum_{\substack{0 \leq t, T \leq \mathbf{T} \\ t^2 + T^2 \neq 0}} |\mathfrak{N}(\mathbf{p}, t, T)|. \quad (7.6)$$

Отбросим в (7.6) равные нулю слагаемые — те, в которых $\mathbf{T}(\mathbf{p}) < 1$. Так случится при \mathbf{p} из интервала $[[\mathbf{P}] + 1, Q_\alpha]$. Согласно соотношениям (6.10) и (7.3), выполняется неравенство $\mathbf{P} \leq Q_\alpha$. Поэтому с помощью приведенных соображений интервал суммирования по \mathbf{p} сокращается, и в результате получаем оценку (7.4). Лемма доказана.

Теорема 7.1. Если для любых натуральных значений α и β найдется число $M_1 = M_1(\alpha, \beta)$, удовлетворяющее оценкам (6.10) и

$$\frac{|\mathfrak{M}| + \mathfrak{M}_0}{|Z||\Omega|^2} \ll (M_1)^{-2+2\delta-\epsilon+O(\epsilon_0)}, \quad (7.7)$$

то для алфавита \mathcal{A} имеют место формулы (1.4) – (1.6).

Доказательство. С помощью оценок (7.4) и (7.7) легко получить неравенство (6.13). Тогда утверждение настоящей теоремы следует из теоремы 6.1. Теорема доказана.

8 Оценка величины $|\mathfrak{M}|$

В этом параграфе будет получена оценка мощности множества \mathfrak{M} , то есть первого из слагаемых в числителе левой части неравенства (7.7). Напомним, что в этой ситуации выполнено равенство $t = T = 0$. В этом случае положим

$$M_2 = \sqrt{\max \left\{ 1, \frac{1}{4} Q_{\beta-1} \right\}}, \quad M_4 = \sqrt{\max \left\{ 1, \frac{1}{4} Q_{\alpha-1} \right\}}. \quad (8.1)$$

Далее, для произвольного множества матриц $\Xi \subseteq \Gamma_{\mathcal{A}}$ число решений сравнения

$$Uv \equiv uV \pmod{q} \quad (8.2)$$

в переменных $\begin{pmatrix} u \\ V \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ U \end{pmatrix} \in \tilde{\Xi}$ обозначим через $R_q(\Xi)$. Здесь и далее символ q употребляется в том же смысле, что и в (6.1).

Лемма 8.1. Для всякого числа M_1 из интервала (6.10) имеет место неравенство

$$|\mathfrak{M}| \ll |\Omega_2| \sum_{\Theta \in Z} R_q(\Omega_3 \Omega_4). \quad (8.3)$$

Доказательство. Рассмотрим разложения (5.5) и (5.9), соответствующие значениям параметров M_1 , M_2 и M_4 . Неравенством (6.10) обеспечивается выполнение оценки (5.14) для параметров (8.1). В [10, лемма 9.1] для элементов некоторого аналогичного \mathfrak{M} множества было доказано равенство $g_2^{(1)} = g_2^{(2)}$. Тем же методом осуществляется доказательство этого равенства и в случае множества \mathfrak{M} для настоящей леммы.

Далее с минимальными изменениями следует повторить аргументы из доказательства [10, леммы 9.2]. Действительно, согласно замечанию 7.1, имеют место сравнения в (7.2). Полагая $g_2^{(1)} = g_2^{(2)} = g_2$, их можно записать в виде

$$\left(g_2 a^{(1)} g_3^{(1)} \tilde{g}_4^{(1)} \equiv g_2 a^{(2)} g_3^{(2)} \tilde{g}_4^{(2)} \right)_{1,2} \pmod{\mathbf{q}},$$

где индексы “1,2” внизу означают выполнение сравнения по обеим координатам. Отсюда, в виду равенства $\det g_2 = 1$, получаем:

$$\left(a^{(1)} g_3^{(1)} \tilde{g}_4^{(1)} \equiv a^{(2)} g_3^{(2)} \tilde{g}_4^{(2)} \right)_{1,2} \pmod{\mathbf{q}}. \quad (8.4)$$

Положим

$$g_3^{(1)} \tilde{g}_4^{(1)} = \begin{pmatrix} u \\ U \end{pmatrix}, \quad g_3^{(2)} \tilde{g}_4^{(2)} = \begin{pmatrix} v \\ V \end{pmatrix}, \quad (8.5)$$

тогда сравнения (8.4) перепишутся в виде

$$a^{(1)}u \equiv a^{(2)}v \pmod{\mathbf{q}}, \quad a^{(1)}U \equiv a^{(2)}V \pmod{\mathbf{q}}. \quad (8.6)$$

Отсюда следует цепочка сравнений:

$$(a^{(1)}U)v \equiv a^{(2)}Vv = (a^{(2)}v)V \equiv (a^{(1)}u)V \pmod{\mathbf{q}}. \quad (8.7)$$

Но числа $a^{(1)}$ и \mathbf{q} взаимно просты как числитель и знаменатель цепной дроби. Следовательно, сокращая сравнение (8.7) на $a^{(1)}$, получаем сравнение (8.2) при $\Xi = \Omega_3\Omega_4$.

Подытожим сказанное, пересчитывая количество входящих в \mathfrak{M} элементов. Для этого выберем и фиксируем матрицу $g_2^{(1)} = g_2^{(2)}$, определяющую элемент $\tilde{g}_2^{(1)} = \tilde{g}_2^{(2)}$, одним из $|\Omega_2|$ способов — это первый множитель в (8.3). Выберем каким-либо способом число $\Theta = \Theta^{(2)} \in Z$, представленное в виде (6.4) — это переменная суммирования в (8.3). Тем самым определено число $q = q^{(1)} = q^{(2)} = \mathbf{q}$, а также числа $a^{(2)}$ и $l^{(2)}$. Выберем также элементы

$$g_3^{(1)}, g_3^{(2)}, g_4^{(1)}, g_4^{(2)},$$

которые в обозначениях (8.5) удовлетворяют сравнению (8.2), одним из $R_q(\Omega_3\Omega_4)$ способов. Заметим теперь, что согласно [8, доказательству леммы 3.13], число $a^{(1)}$ определяется по $a^{(2)}$ однозначно, исходя из сравнений (8.6). Наконец, согласно замечанию 7.1, величина $l^{(1)}$ определяется по $l^{(2)}$ из неравенства (7.1) не более, чем некоторой константой способов. Лемма доказана.

Для каждой матрицы $g_3 \in \Omega_3$ через $g_3\Omega_4$ обозначим множество матриц, получающихся умножением g_3 на произвольные матрицы из Ω_4 .

Лемма 8.2. *Для всякого числа M_1 из интервала (6.10) имеют место неравенства*

$$R_q(\Omega_3\Omega_4) \leq |\Omega_3| \sum_{g_3 \in \Omega_3} R_q(g_3\Omega_4) \leq |\Omega_3|^2 |\Omega_4|. \quad (8.8)$$

Доказательство. Используя обозначения (8.5), положим $r = \gcd(v, q)$. Заметим, что числа v и V взаимно просты как числитель и знаменатель цепной дроби. Поэтому, ввиду сравнения (8.2), выполнено также равенство $r = \gcd(u, q)$. Далее, положим

$$u_0 = \frac{u}{r}, \quad v_0 = \frac{v}{r}, \quad q_0 = \frac{q}{r}.$$

Введем также обозначения $(u_0)^{(-1)}, (v_0)^{(-1)}$ для вычетов по модулю q_0 , обратных к u_0, v_0 , соответственно. Используя формулу (3.1), получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} R_q(\Omega_3\Omega_4) &= \sum_{\left(\frac{u}{U}\right), \left(\frac{v}{V}\right) \in \tilde{\Omega}_{3,4}} \delta_q(Uv - uV) = \sum_{r|q} \sum_{\substack{\left(\frac{u}{U}\right), \left(\frac{v}{V}\right) \in \tilde{\Omega}_{3,4} \\ \gcd(u,q)=\gcd(v,q)=r}} \delta_{q_0}(Uv_0 - u_0V) = \\ &= \sum_{r|q} \sum_{\substack{\left(\frac{u}{U}\right), \left(\frac{v}{V}\right) \in \tilde{\Omega}_{3,4} \\ \gcd(u,q)=\gcd(v,q)=r}} \delta_{q_0}(U(u_0)^{(-1)} - V(v_0)^{(-1)}) = \sum_{r|q} \sum_{k=1}^{q_0} \frac{1}{q_0} \left| \sum_{\substack{\left(\frac{u}{U}\right) \in \Omega_3\tilde{\Omega}_4 \\ \gcd(u,q)=r}} e_{q_0}\left(U(u_0)^{(-1)}k\right) \right|^2, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где сумма по r берется по всем делителям числа q .

Представим аргумент внутренней суммы в (8.9), стоящей под знаком модуля, в виде $\binom{u}{U} = g_3 \tilde{g}_4$, где $g_3 \in \Omega_3$, $g_4 \in \Omega_4$, и определим функцию $f_{k,r}$ равенством

$$f_{k,r}(g_3 \tilde{g}_4) = e_{q_0} \left(U(u_0)^{(-1)} k \right).$$

Оценим квадрат модуля внутренней суммы по $\binom{u}{U}$ из (8.9) с помощью неравенств треугольника и Коши — Буняковского:

$$\left| \sum_{g_3 \in \Omega_3} \sum_{\substack{g_4 \in \Omega_4 \\ \gcd(u,q)=r}} f_{k,r}(g_3 \tilde{g}_4) \right|^2 \leq \left(\sum_{g_3 \in \Omega_3} \left| \sum_{\substack{g_4 \in \Omega_4 \\ \gcd(u,q)=r}} f_{k,r}(g_3 \tilde{g}_4) \right| \right)^2 \leq |\Omega_3| \sum_{g_3 \in \Omega_3} \left| \sum_{\substack{g_4 \in \Omega_4 \\ \gcd(u,q)=r}} f_{k,r}(g_3 \tilde{g}_4) \right|^2.$$

Подставим результат этой оценки в равенство (8.9):

$$R_q(\Omega_3 \Omega_4) \leq |\Omega_3| \sum_{r|q} \sum_{g_3 \in \Omega_3} \frac{1}{q_0} \sum_{k=1}^{q_0} \left| \sum_{\substack{\binom{u}{U} \in g_3 \tilde{\Omega}_4 \\ \gcd(u,q)=r}} e_{q_0} \left(U(u_0)^{(-1)} k \right) \right|^2. \quad (8.10)$$

Раскрывая в (8.10) квадрат модуля тригонометрической суммы и заменяя сумму по k δ -символом Коробова, получаем:

$$\begin{aligned} R_q(\Omega_3 \Omega_4) &\leq |\Omega_3| \sum_{r|q} \sum_{g_3 \in \Omega_3} \sum_{\substack{\binom{u}{U}, \binom{v}{V} \in g_3 \tilde{\Omega}_4 \\ \gcd(u,q)=\gcd(v,q)=r}} \delta_{q_0}(Uv_0 - u_0V) = \\ &= |\Omega_3| \sum_{g_3 \in \Omega_3} \sum_{\binom{u}{U}, \binom{v}{V} \in g_3 \tilde{\Omega}_4} \delta_q(Uv - uV) = |\Omega_3| \sum_{g_3 \in \Omega_3} R_q(g_3 \Omega_4). \end{aligned}$$

Первое из неравенств в (8.8) доказано.

Далее, почти дословным повторением рассуждений из [10, доказательства леммы 9.2] выводится равномерная оценка по g_3 из Ω_3 :

$$R_q(g_3 \Omega_4) \ll |\Omega_4|. \quad (8.11)$$

Остается подставить оценку (8.11) в доказанное первое из неравенств в (8.8), откуда сразу следует второе из них. Лемма доказана.

Рассмотрим неравенство

$$(Q_\alpha Q_\beta)^\delta \gg (M_1)^{2-2\delta+\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}. \quad (8.12)$$

Теорема 8.1. *Если число M_1 лежит в интервале (6.10) и удовлетворяет неравенству (8.12), то имеют место оценки*

$$\frac{|\mathfrak{M}|}{|Z| |\Omega|^2} \ll \frac{1}{(Q_\alpha Q_\beta)^\delta} (M_1)^{O(\varepsilon_0)} \ll (M_1)^{-2+2\delta-\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}. \quad (8.13)$$

Доказательство. Ввиду лемм 8.1 и 8.2, имеет место неравенство

$$|\mathfrak{M}| \ll |\Omega_2| |\Omega_3|^2 |\Omega_4| |Z| = \frac{|\Omega|^2 |Z|}{|\Omega_2| |\Omega_4|}. \quad (8.14)$$

Подставляя в неравенство (8.14) оценки (5.13) и (5.15), получаем соотношение

$$\frac{|\mathfrak{M}|}{|Z| |\Omega|^2} \ll \frac{(M_1 M_2 M_4)^{10\varepsilon_0}}{(M_2 M_4)^{2\delta}}.$$

Подставляя сюда значения M_2 и M_4 из (8.1), получаем первую из оценок в (8.13). Вторая из них получается при подстановке неравенства (8.12). Теорема доказана.

9 Определение и свойства соответственных чисел

Рассмотрим неравенства

$$\frac{\mathfrak{M}_0}{|Z||\Omega|^2} \ll \frac{1}{(Q_\alpha Q_\beta)^\delta} (M_1)^{O(\varepsilon_0)}, \quad (9.1)$$

$$\frac{\mathfrak{M}_0}{|Z||\Omega|^2} \ll (M_1)^{-2+2\delta-\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}. \quad (9.2)$$

Определение 9.1. Для любой пары натуральных чисел α и β всякое число M_1 со свойствами (6.10), (8.12) и (9.2) назовем **соответственным**.

Лемма 9.1. Если для числа M_1 из интервала (6.10) выполнены неравенства (8.12) и (9.1), то имеет место оценка (9.2), то есть, число M_1 — соответственное.

Кроме того, если для любых натуральных чисел α и β найдется соответственное значение M_1 , то для алфавита \mathcal{A} имеют место формулы (1.4) — (1.6).

Доказательство. Из оценок (8.12) и (9.1) неравенство (9.2) следует непосредственно, так что первая часть леммы доказана.

Чтобы доказать вторую часть леммы, сначала применим теорему 8.1. Тогда получим, что неравенства (8.13) выполнены. Остается подставить оценки (8.13) и (9.2) в теорему 7.1. Лемма доказана.

Лемма 9.2. Пусть для числа M_1 выполнено неравенство (8.12) и имеет место хотя бы один из следующих двух наборов соотношений

$$M_1 = 120A^2 \sqrt{NQ_\alpha Q_\beta}, \quad (Q_\alpha)^4 (Q_\beta)^4 \geq N, \quad (9.3)$$

$$M_1 = 150A^2 (Q_\alpha)^2 Q_\beta, \quad (Q_\alpha)^5 (Q_\beta)^3 \leq N^2. \quad (9.4)$$

Тогда выполнены формулы (6.10) и $\mathfrak{M}_0 = 0$ (откуда следует выполнение неравенства (9.2)), то есть, число M_1 — соответственное.

Доказательство. Пусть число M_1 определено любым из двух перечисленных способов. Тогда оценка (6.10) получается применением неравенств из [10, замечания 7.2]:

$$Q_\alpha Q_\beta \leq Q_3 \sqrt{N}, \quad (Q_\alpha)^2 Q_\beta \leq 3Q_2 N,$$

справедливых для всех непустых множеств $P_{\alpha,\beta}$. А равенство $\mathfrak{M}_0 = 0$ получается дословным повторением доказательств [10, леммы 8.6] или [8, леммы 3.4]. Лемма доказана.

Всюду далее считаем, что алфавит \mathcal{A} удовлетворяет неравенству

$$\frac{11}{14} < \delta \leq \frac{4}{5}. \quad (9.5)$$

Лемма 9.3. Пусть для пары натуральных чисел α и β выполнено неравенство

$$N^{1-\delta} \leq \left((Q_\alpha)^{2\delta-1} (Q_\beta)^{2\delta-1} \right)^{1-\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}. \quad (9.6)$$

Тогда найдется соответственное значение M_1 .

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (9.6). Поскольку $\delta < \frac{5}{6}$, то выполнено неравенство

$$\frac{1-\delta}{2\delta-1} > \frac{1}{4}. \quad (9.7)$$

Отсюда и из неравенства (9.6) следует неравенство в (9.3). Следовательно, определяя число M_1 равенством в (9.3), получаем, что неравенство (8.12) совпадает с неравенством (9.6). В таком случае число M_1 является соответственным значением ввиду леммы 9.2. Лемма доказана.

Лемма 9.4. *Для всякой пары натуральных чисел α и β , таких что $\alpha \leq 5\beta$, найдется соответственное значение M_1 .*

Доказательство. Пусть, для начала, выполнено неравенство

$$N < (Q_\alpha)^{\frac{5}{2}}(Q_\beta)^{\frac{3}{2}}. \quad (9.8)$$

Тогда выполнено неравенство в (9.3). Определим число M_1 равенством в (9.3). Тогда, ввиду леммы 9.2, достаточно проверить оценку (8.12), сводящуюся к неравенству

$$(NQ_\alpha Q_\beta)^{1-\delta} \ll (Q_\alpha Q_\beta)^{\delta+O(\varepsilon_0)-\mathbf{c}}.$$

Для этого, ввиду неравенства (9.8), достаточно установить оценку

$$\left((Q_\alpha)^{\frac{5}{2}}(Q_\beta)^{\frac{3}{2}}Q_\alpha Q_\beta\right)^{1-\delta} \ll (Q_\alpha Q_\beta)^{\delta+O(\varepsilon_0)-\mathbf{c}},$$

или

$$(Q_\alpha)^{7-9\delta}(Q_\beta)^{5-7\delta} \ll (Q_\alpha Q_\beta)^{O(\varepsilon_0)-\mathbf{c}}.$$

Такая оценка следует из (9.5), поскольку $\delta > \frac{11}{14} > \frac{7}{9}$, $\delta > \frac{5}{7}$.

Если же неравенство (9.8) не выполнено, то, следовательно, имеет место противоположное неравенство $(Q_\alpha)^{\frac{5}{2}}(Q_\beta)^{\frac{3}{2}} \leq N$. В этом случае число M_1 определим равенством в (9.4). Тогда применение леммы 9.2 при подстановке такого значения M_1 в неравенство (8.12) приводит к достаточности проверки неравенства

$$((Q_\alpha)^2 Q_\beta)^{2-2\delta} \ll (Q_\alpha)^\delta (Q_\beta)^\delta (Q_\alpha Q_\beta)^{O(\varepsilon_0)-\mathbf{c}},$$

или

$$(Q_\alpha)^{4-5\delta}(Q_\beta)^{2-3\delta} \ll (Q_\alpha Q_\beta)^{O(\varepsilon_0)-\mathbf{c}}.$$

Переходя к логарифмам, получаем, что достаточно проверить неравенство

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq 5 < \frac{3\delta-2}{4-5\delta},$$

справедливое, ввиду (9.5), при $\alpha \leq 5\beta$. Лемма доказана.

Рассмотрим неравенства

$$\alpha > 5\beta, \quad (9.9)$$

$$(Q_\alpha)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}}(Q_\beta)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}} \leq N^{1-\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}. \quad (9.10)$$

Теорема 9.1. *Если соответственное значение M_1 найдется для любых натуральных чисел α и β , удовлетворяющих неравенствам (9.9) и (9.10), то для алфавита \mathcal{A} имеют место формулы (1.4) – (1.6).*

Доказательство. Согласно второй части леммы 9.1, достаточно найти соответственные числа M_1 для каждой пары натуральных чисел α и β . Однако при невыполнении неравенства (9.9) существование соответственного числа доказано в лемме 9.4, а при невыполнении неравенства (9.10) — в лемме 9.3. Теорема доказана.

Всюду далее считаем, что неравенства (9.9) и (9.10) выполнены.

Замечание 9.1. Для выполнения неравенства (5.18) и второй из верхних оценок в (6.10) достаточно потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$M_1 Q_\alpha \leq \left((Q_\alpha)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}} (Q_\beta)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}} \right)^{1-c+O(\varepsilon_0)}. \quad (9.11)$$

Действительно: для неравенства (5.18) это утверждение сразу следует из сравнения неравенств (5.18) и (9.10).

Теми же соображениями обеспечивается выполнение второй из верхних оценок в (6.10). Именно, чтобы ее получить, достаточно неравенство $M_1 \sqrt{Q_\alpha Q_\beta} \leq M_1 Q_\alpha$, справедливое ввиду (9.9), продолжить неравенством (9.11) и применить оценку (9.10).

10 Оценка величины \mathfrak{M}_0

В этом параграфе будет получена оценка величины \mathfrak{M}_0 , то есть числителя левой части неравенства (9.2), при невыполнении условий леммы 9.2.

Пусть m, n, \mathbf{p}, t — данные целые числа, такие что mnp не равно нулю и числа m и n взаимно просты. Рассмотрим в целых переменных x и y сравнение

$$mx - ny \equiv t \pmod{(mnp)}. \quad (10.1)$$

Лемма 10.1. Найдутся целые числа $x^{(0)}, y^{(0)}$ и k , зависящие только от значений параметров m, n, \mathbf{p}, t , такие что $0 \leq k < \mathbf{p}$ и для любого решения (x, y) сравнения (10.1) выполняются сравнения

$$x \equiv x^{(0)} + kn \pmod{n\mathbf{p}}, \quad y \equiv y^{(0)} + km \pmod{m\mathbf{p}}. \quad (10.2)$$

Доказательство. Пусть $(x, y), (X, Y)$ — какие-нибудь два решения сравнения (10.1). Тогда подстановка этих значений в исходное сравнение при последующем вычитании результатов этих подстановок дает сравнение

$$m(x - X) \equiv n(y - Y) \pmod{mnp}. \quad (10.3)$$

Поэтому, ввиду взаимной простоты чисел m и n , выполняются сравнения $x \equiv X \pmod{n}$, $y \equiv Y \pmod{m}$. Следовательно, найдутся числа k_1 и k_2 , такие что

$$x = X + k_1 n, \quad y = Y + k_2 m. \quad (10.4)$$

Подстановка значений (10.4) в сравнение (10.3) приводит к сравнению $k_1 \equiv k_2 \equiv k \pmod{\mathbf{p}}$, и сравнения (10.2) доказаны. Чтобы прийти к неравенству $0 \leq k < \mathbf{p}$, остается лишь вместо числа k рассмотреть его остаток от деления на \mathbf{p} . Лемма доказана.

Напомним обозначения (5.11) и (6.4). Пусть фиксированы значения

$$a^{(1)}, a^{(2)}, q^{(1)}, q^{(2)}, t, T, \quad (10.5)$$

тогда число решений системы из двух сравнений (6.6) в переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix} \in \Omega \quad (10.6)$$

обозначим через $X_{t,T}(a^{(1)}, a^{(2)}, q^{(1)}, q^{(2)})$.

Неравенства (5.18) для ближайших далее трех лемм будем считать выполненными, так что, согласно теореме 5.1, имеет место разложение полуансамбля (5.9) с Ω_2 и Ω_4 , соответствующими параметрам (5.17).

Лемма 10.2. *Имеют место оценки*

$$X_{t,T}(a^{(1)}, a^{(2)}, q^{(1)}, q^{(2)}) \ll |\Omega_3|^2 \mathbf{p}^2 = \frac{|\Omega|^2 \mathbf{p}^2}{|\Omega_4|^2}, \quad (10.7)$$

$$|\Omega_4| \gg (Q_\alpha)^{2\delta-2\varepsilon_0}. \quad (10.8)$$

Доказательство. При $\alpha = 1$ утверждение леммы легко доказывается, поэтому достаточно рассмотреть случай $\alpha > 1$. Заметим также, что, согласно теореме 5.1, выполнено второе из неравенств (5.10), ввиду которого выполняется оценка (10.8).

Рассмотрим сравнения в (6.6), полагая $n = q_0^{(1)}$, $m = q_0^{(2)}$, тогда мы приходим к двум сравнениям вида (10.1). Так как $\mathbf{p}n = q^{(1)}$, $\mathbf{p}m = q^{(2)}$, то, согласно лемме 10.1, найдутся целые числа k_1 и k_2 в интервале $[0, \mathbf{p} - 1]$, такие что

$$\begin{pmatrix} xa^{(1)} \\ Xa^{(1)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^{(0)} + k_1 q_0^{(1)} \\ X^{(0)} + k_2 q_0^{(1)} \end{pmatrix} \pmod{q^{(1)}}, \quad \begin{pmatrix} ya^{(2)} \\ Ya^{(2)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y^{(0)} + k_1 q_0^{(2)} \\ Y^{(0)} + k_2 q_0^{(2)} \end{pmatrix} \pmod{q^{(2)}}, \quad (10.9)$$

где $x^{(0)}, X^{(0)}$ и $y^{(0)}, Y^{(0)}$ — константы, аналогичные величинам $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ из леммы 10.1.

Поскольку $M_2 = 1$, то $\Omega_2 = \{E\}$. Поэтому вектора $\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix}$, участвующие в левых частях сравнений в (10.9), можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} = g_3^{(1)} \begin{pmatrix} x_4 \\ X_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix} = g_3^{(2)} \begin{pmatrix} y_4 \\ Y_4 \end{pmatrix}.$$

Пусть $(a^{(1)})^{-1}, (a^{(2)})^{-1}$ — вычеты по модулям $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, обратные к $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$, соответственно. Тогда, умножая сравнения (10.9) на $(a^{(1)})^{-1}$ или, соответственно, на $(a^{(2)})^{-1}$, а также на матрицы, обратные к матрицам $g_3^{(1)}$ или, соответственно, $g_3^{(2)}$, получаем:

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ X_4 \end{pmatrix} \equiv \left(g_3^{(1)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} x^{(0)} + k_1 q_0^{(1)} \\ X^{(0)} + k_2 q_0^{(1)} \end{pmatrix} (a^{(1)})^{-1} \pmod{q^{(1)}}, \quad (10.10)$$

$$\begin{pmatrix} y_4 \\ Y_4 \end{pmatrix} \equiv \left(g_3^{(2)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} y^{(0)} + k_1 q_0^{(2)} \\ Y^{(0)} + k_2 q_0^{(2)} \end{pmatrix} (a^{(2)})^{-1} \pmod{q^{(2)}}. \quad (10.11)$$

Заметим, что правые части сравнений (10.10) и (10.11) зависят только от величин k_1 и k_2 и значений параметров (10.5). Поэтому, ввиду сравнений (10.10) и (10.11), при фиксированных значениях k_1 и k_2 вектора $\begin{pmatrix} x_4 \\ X_4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} y_4 \\ Y_4 \end{pmatrix}$ определены не более, чем однозначно. Это следует из неравенства (5.16), поскольку, согласно выбору числа M_4 , выполняется неравенство $M_4 < Q_{\alpha-1} \leq \min\{q^{(1)}, q^{(2)}\}$.

Подытожим сказанное, пересчитывая количество решений полученной системы сравнений. Для этого матрицы $g_3^{(1)}$ и $g_3^{(2)}$ выберем одним из $|\Omega_3|^2$ способов, а числа k_1 и k_2 — одним из \mathbf{p}^2 вариантов. Поэтому имеет место неравенство (10.7). Лемма доказана.

Лемма 10.3. Пусть для натуральных α и β , для любого значения $\mathbf{p} \in [1, \mathbf{P}]$ и для любых чисел t, T из интервала $[0, \mathbf{T}]$ найдется число M_1 со свойствами (6.10) и (8.12), такое что при этом для него выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\frac{|\mathfrak{N}(\mathbf{p}, t, T)|}{\mathbf{p}|Z||\Omega|^2} \ll \frac{(M_1)^{2\delta - \mathbf{c} + O(\varepsilon_0)}}{(Q_\alpha)^4 (Q_\beta)^2}, \quad (10.12)$$

$$\sum_{\substack{0 \leq t, T \leq \mathbf{T} \\ t^2 + T^2 \neq 0}} \frac{|\mathfrak{N}(\mathbf{p}, t, T)|}{|Z||\Omega|^2} \ll \frac{1}{\mathbf{p}} (M_1)^{2\delta - 2 - \mathbf{c} + O(\varepsilon_0)}. \quad (10.13)$$

Тогда имеет место оценка (9.2), то есть, число M_1 — соответствующее.

Доказательство. Суммируя неравенство (10.12) по t и T в пределах от 0 до \mathbf{T} , получаем оценку (10.13). Далее, суммируя неравенство (10.13) по \mathbf{p} в пределах от 1 до \mathbf{P} , получаем оценку (9.2). Лемма доказана.

Лемма 10.4. Пусть выполнена оценка (6.10). Тогда имеют место оценки

$$\frac{|\mathfrak{N}(\mathbf{p}, t, T)|}{\mathbf{p}|Z||\Omega|^2} \ll \frac{|Z|\mathbf{p}}{(Q_\alpha)^{4\delta - 4\varepsilon_0}} \ll \frac{Q_\beta}{(Q_\alpha)^{4\delta - 2 - 4\varepsilon_0}}. \quad (10.14)$$

Доказательство. Пересчитаем количество элементов в $\mathfrak{N}(\mathbf{p}, t, T)$. Для этого выберем $|Z|^2$ способами числа $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)} \in Z$. Тогда значения параметров (10.5) полностью определены. Следовательно, выбирая $X_{t,T}(a^{(1)}, a^{(2)}, q^{(1)}, q^{(2)})$ способами решение системы из двух сравнений (6.6) в переменных (10.6), ввиду леммы 10.2, получаем:

$$|\mathfrak{N}(\mathbf{p}, t, T)| \ll |Z|^2 X_{t,T}(a^{(1)}, a^{(2)}, q^{(1)}, q^{(2)}) \leq \frac{|Z|^2 |\Omega|^2}{|\Omega_4|^2} \mathbf{p}^2.$$

Применяя здесь неравенство (10.8), приходим к первой из оценок в (10.14).

Поскольку для чисел $\Theta \in Z$ выполнены соотношения (6.1) и (6.2), то, следовательно,

$$|Z| \leq \frac{1}{\mathbf{p}} (Q_\alpha)^2 Q_\beta. \quad (10.15)$$

Это неравенство получается из учета не более $\frac{1}{\mathbf{p}} (Q_\alpha)^2$ дробей $\frac{a}{\mathbf{q}}$, в которых \mathbf{q} делится на \mathbf{p} , и не более Q_β значений параметра l — для каждой из них. Подставляя оценку (10.15) в доказанную первую из оценок в (10.14), получаем вторую из них. Лемма доказана.

Напомним, что здесь и далее неравенства (9.5), (9.9) и (9.10) выполнены.

Теорема 10.1. Пусть выполнено неравенство

$$\delta > \frac{\sqrt{21} - 3}{2} = 0.791 \dots \quad (10.16)$$

Тогда для алфавита \mathcal{A} имеют место формулы (1.4) — (1.6).

Доказательство. В силу теоремы 11.5 и леммы 10.3, достаточно доказать соответственность числа M_1 , заданного равенством

$$M_1 = \left((Q_\alpha)^{\frac{3-2\delta}{\delta}} (Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \right)^{1+\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}. \quad (10.17)$$

То есть, достаточно доказать неравенства (5.18), (6.10), (8.12) и (10.12) для такого M_1 .
Для этого рассмотрим неравенство

$$(Q_\alpha)^{\frac{3-\delta}{\delta}} (Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \leq \left((Q_\alpha)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}} (Q_\beta)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}} \right)^{1-\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}. \quad (10.18)$$

Оно доказывается с помощью неравенств

$$\frac{3-\delta}{\delta} < \frac{2\delta-1}{1-\delta}, \quad \frac{3}{2\delta} < \frac{2\delta-1}{1-\delta}, \quad (10.19)$$

имеющих место ввиду (10.16) (действительно, неравенства (10.19) можно преобразовать, соответственно, к виду $\delta^2 + 3\delta - 3 > 0$ или $4\delta^2 + \delta - 3 > 0$). Отсюда получается неравенство (9.11). Поэтому, согласно замечанию 9.1, имеют место неравенство (5.18) и вторая из верхних оценок в (6.10). Остальные оценки в (6.10) доказываются применением неравенств

$$1 < \frac{3-2\delta}{\delta} < 5, \quad 1 < \frac{3}{2\delta} < 5,$$

имеющих место ввиду оценки (9.5).

Следовательно, выполнены условия леммы 10.4, согласно которой выполняется оценка (10.14). Чтобы обеспечить выполнение условий леммы 10.3, нужно, в частности, вывести из доказанной оценки (10.14) неравенство (10.12). Однако неравенства (10.12) и (10.14) соответствуют одно другому при M_1 , определенном равенством (10.17).

Рассмотрим следующее из условия (10.16) неравенство

$$(Q_\alpha)^{\frac{3-2\delta}{\delta}} (Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \leq \left((Q_\alpha)^{\frac{\delta}{2-2\delta}} (Q_\beta)^{\frac{\delta}{2-2\delta}} \right)^{1-\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}. \quad (10.20)$$

(Действительно, для его доказательства достаточно лишь проверить неравенства

$$\frac{3-2\delta}{\delta} < \frac{\delta}{2-2\delta}, \quad \frac{3}{2\delta} < \frac{\delta}{2-2\delta},$$

равносильные, соответственно, оценкам $\delta^2 - 10\delta + 6 < 0$ или $3\delta^2 + 3\delta - 3 > 0$, справедливым при $\delta > \frac{5-\sqrt{7}}{3} = 0.7847\dots$ или, соответственно, при выполнении неравенства (10.16) в точности.) Из неравенства (10.20) оценка (8.12) следует непосредственно. Все условия леммы 10.3 выполнены. Поэтому утверждение теоремы следует из леммы 10.3. Теорема доказана.

11 Обобщение теоремы 10.1.

Обобщим результат этой теоремы на величины δ , не удовлетворяющие неравенству (10.16). Для этого рассмотрим действительные параметры \mathbf{m} и $\rho = \rho(\mathbf{m})$ и соотношения

$$0 < 2\rho < \delta, \quad (11.1)$$

$$(Q_\alpha Q_\beta)^\rho \gg (M_1)^{1-\delta+\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}, \quad (11.2)$$

$$\frac{\mathfrak{M}_0}{|Z||\Omega|^2} \ll \frac{1}{(Q_\alpha Q_\beta)^{2\rho}} (M_1)^{O(\varepsilon_0)}, \quad (11.3)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \mathbf{m} > 5. \quad (11.4)$$

Определение 11.1. Пусть действительное число $\mathbf{m} > 5$ и натуральные числа α и β подчинены условию (11.4), а для числа M_1 из интервала (6.10) выполнена оценка (9.2). Если найдется число 2ρ из интервала (11.1), такое что выполнено неравенство (11.2), то число M_1 назовем **\mathbf{m} -соответственным**.

Лемма 11.1. Пусть для натуральных чисел (α, β) , подчиненных условию (11.4), найдется \mathbf{m} -соответственное значение M_1 . Тогда имеют место оценки (8.13).

Доказательство. Возводя неравенство (11.2) в квадрат и умножая на неравенство $(Q_\alpha Q_\beta)^{\delta-2\rho} > 1$, выполненное по условию (11.1), получаем оценку (8.12). Так что утверждение леммы следует из теоремы 8.1 непосредственно. Лемма доказана.

Лемма 11.2. Пусть фиксировано число $\mathbf{m} > 5$. Если для числа M_1 из интервала (6.10) выполнены неравенства (11.2) и (11.3) с некоторым подчиненным условию (11.1) числом ρ , то имеет место оценка (9.2), то есть число M_1 — \mathbf{m} -соответственное (для любой пары натуральных чисел α и β , подчиненных условию (11.4)).

Кроме того, если для любого числа $\mathbf{m} > 5$ и для любых натуральных чисел α и β , подчиненных условию (11.4), найдется \mathbf{m} -соответственное значение M_1 , то для алфавита \mathcal{A} имеют место формулы (1.4) — (1.6).

Доказательство. Возводя оценку (11.2) в (-2) -ю степень и подставляя в правую часть (11.3), получаем неравенство (9.2). Так что первая часть леммы доказана.

Переходим ко второй части. Согласно лемме 11.1, неравенства (8.13) выполнены. Остается подставить оценки (8.13) и (9.2) в теорему 7.1. Лемма доказана.

Лемма 11.3. Если для числа M_1 имеют место соотношения (9.3) и (11.2), то выполнено равенство $\mathfrak{M}_0 = 0$ (откуда следует неравенство (11.3) с любым подчиненным условию (11.1) числом ρ) и неравенство (6.10), то есть, ввиду первой части леммы 11.2, число M_1 — \mathbf{m} -соответственное.

Доказательство настоящей леммы состоит в почти дословном повторении доказательства леммы 9.2. Лемма доказана.

Лемма 11.4. Пусть для натуральных чисел α и β , подчиненных условию (11.4), выполнены неравенства

$$N^{1-\delta} \leq \left((Q_\alpha)^{2\rho+\delta-1} (Q_\beta)^{2\rho+\delta-1} \right)^{1-\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}, \quad (11.5)$$

$$\frac{2\rho + \delta - 1}{1 - \delta} < 4. \quad (11.6)$$

Тогда найдется \mathbf{m} -соответственное значение M_1 .

Доказательство. Из неравенств (11.5) и (11.6) следует неравенство в (9.3). Следовательно, определяя число M_1 равенством в (9.3), получаем, что из неравенства (11.5) следует неравенство (11.2). В таком случае число M_1 является \mathbf{m} -соответственным значением ввиду леммы 11.3. Лемма доказана.

Рассмотрим оценку

$$(Q_\alpha)^{\frac{2\rho+\delta-1}{1-\delta}} (Q_\beta)^{\frac{2\rho+\delta-1}{1-\delta}} \leq N^{1+O(\varepsilon_0)}. \quad (11.7)$$

Лемма 11.5. Пусть выполнено неравенство (11.6). Если \mathbf{m} -соответственное значение M_1 найдется для любых натуральных чисел α и β , удовлетворяющих неравенствам (11.4) и (11.7), то для алфавита \mathcal{A} имеют место формулы (1.4) — (1.6).

Доказательство. Согласно второй части леммы 11.2, достаточно найти \mathbf{m} -соответственные числа M_1 для каждой пары натуральных чисел α и β . Однако при невыполнении неравенства (11.7) существование соответственного числа доказано в лемме 11.4. Лемма доказана.

Всюду далее считаем, что неравенства (11.6) и (11.7) выполнены.

Замечание 11.1. Для выполнения неравенства (5.18) и второй из верхних оценок в (6.10) достаточно потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$M_1 Q_\alpha \leq \left((Q_\alpha)^{\frac{2\rho+\delta-1}{1-\delta}} (Q_\beta)^{\frac{2\rho+\delta-1}{1-\delta}} \right)^{1-\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}. \quad (11.8)$$

Действительно: для неравенства (5.18) это утверждение сразу следует из сравнения неравенств (5.18) и (11.7).

Теми же соображениями обеспечивается выполнение второй из верхних оценок в (6.10). Именно, чтобы ее получить, достаточно неравенство $M_1 \sqrt{Q_\alpha Q_\beta} \leq M_1 Q_\alpha$, справедливое ввиду (11.4), продолжить неравенством (11.8) и применить оценку (11.7).

Лемма 11.6. Пусть для некоторых натуральных α и β , таких что выполнено равенство (11.4), найдется подчиненное условию (11.1) число ρ , для которого существует число M_1 со свойствами (6.10) и (11.2). Пусть при этом для любого значения $\mathbf{p} \in [1, \mathbf{P}]$ и для любых t и T из интервала $[0, \mathbf{T}]$ выполнено неравенство

$$\frac{|\mathfrak{N}(\mathbf{p}, t, T)|}{\mathbf{p}|Z||\Omega|^2} \ll \frac{(M_1)^{2+O(\varepsilon_0)}}{(Q_\alpha)^{4+2\rho} (Q_\beta)^{2+2\rho}}. \quad (11.9)$$

Тогда имеет место оценка (9.2), то есть, число M_1 — \mathbf{m} -соответственное.

Доказательство. Суммируя неравенство (11.9) по t и T в пределах от 0 до \mathbf{T} и по \mathbf{p} в пределах от 1 до \mathbf{P} , получаем оценку (11.3). Поэтому утверждение леммы следует из первой части леммы 11.2. Лемма доказана.

Всюду далее число M_1 задается равенством

$$M_1 = \left((Q_\alpha)^{3-2\delta+\rho} (Q_\beta)^{1.5+\rho} \right)^{1+\mathbf{c}+O(\varepsilon_0)}. \quad (11.10)$$

Лемма 11.7. Пусть для некоторого числа $\mathbf{m} > 5$ найдется число ρ , такое что выполнены неравенства (11.1), (11.6) и еще — два:

$$\mathbf{m} \left(4\delta - 10 - 2\rho + \frac{6}{\delta} \right) < 2\rho + 3 - \frac{3}{\delta}, \quad (11.11)$$

$$4 - 2\delta + \rho - \frac{2\rho + \delta - 1}{1 - \delta} < 0 < \frac{2\rho + \delta - 1}{1 - \delta} - 1.5 - \rho. \quad (11.12)$$

Тогда число M_1 , заданное равенством (11.10), является \mathbf{m} -соответственным для любых натуральных α и β , подчиненных условию (11.4).

Доказательство. Предполагается использовать леммы 10.4 и 11.6, поэтому следует обеспечить условия их применимости, доказав неравенства (5.18), (6.10), (11.2) и (11.9).

Для начала заметим, что, ввиду (11.10) и (11.12), выполнена оценка (11.8). Из нее, согласно замечанию 11.1, следуют неравенство (5.18) и вторая из верхних оценок в (6.10). Остальные оценки в (6.10) доказываются применением следующих из условия (11.1) неравенств

$$1 < 3 - 2\delta + \rho < 5, \quad 1 < 1.5 + \rho < 5.$$

Следовательно, выполнены условия леммы 10.4. Согласно этой лемме, ввиду оценки (10.14), равенством (11.10) обеспечивается выполнение неравенства (11.9).

Далее, заметим, что неравенство (11.11) можно с помощью равенства в (11.4) преобразовать к виду

$$\alpha\rho + \beta\rho > (\alpha(3 - 2\delta + \rho) + \beta(1.5 + \rho))(1 - \delta). \quad (11.13)$$

Беря экспоненту от обеих частей неравенства (11.13), получаем оценку (11.2):

$$(Q_\alpha Q_\beta)^\rho >> \left((Q_\alpha)^{3-2\delta+\rho} (Q_\beta)^{1.5+\rho} \right)^{1-\delta} (Q_\alpha Q_\beta)^{c+O(\varepsilon_0)}.$$

Поэтому выполнены условия леммы 11.6, согласно которой число M_1 — \mathbf{m} -соответственное. Лемма доказана.

Теорема 11.1. Пусть для некоторого числа $\mathbf{m} > 5$ найдется число ρ , такое что выполнены неравенства

$$2\rho(1 + \mathbf{m}) > \max \left\{ \frac{4\delta^2 - 10\delta + 6}{1 + \delta}(\mathbf{m} + 1), \quad \frac{5 - 5\delta}{\delta + 1}(\mathbf{m} + 1), \quad \mathbf{m} \left(4\delta - 10 + \frac{6}{\delta} \right) - 3 + \frac{3}{\delta} \right\}, \quad (11.14)$$

$$2\rho(1 + \mathbf{m}) < \min \{ \delta(\mathbf{m} + 1), \quad (5 - 5\delta)(\mathbf{m} + 1) \}. \quad (11.15)$$

Тогда число M_1 , заданное равенством (11.10), является \mathbf{m} -соответственным для любых натуральных α и β , подчиненных условию (11.4).

Доказательство. Решая относительно переменной ρ неравенства (11.1), (11.6), (11.11) и (11.12), получаем неравенства (11.14) и (11.15). Поэтому утверждение леммы следует из леммы 11.7. Теорема доказана.

12 Доказательство теорем 2.1 и 2.2

Расшифруем неравенство (11.15). Минимум в правой части этого неравенства достигается на первом элементе ввиду неравенства (9.5): действительно, сравнение элементов этого минимума приводит к неравенству $\delta < \frac{5}{6}$.

Далее, система неравенств (11.14) и (11.15) относительно переменной $2\rho(1 + \mathbf{m})$ разрешима тогда и только тогда, когда нижняя оценка этой переменной, данная в неравенстве (11.14), меньше ее верхней оценки, данной неравенством (11.15). Другими словами, когда выполнено неравенство

$$\delta(1 + \mathbf{m}) > \max \left\{ \frac{4\delta^2 - 10\delta + 6}{1 + \delta}(\mathbf{m} + 1), \quad \frac{5 - 5\delta}{\delta + 1}(\mathbf{m} + 1), \quad \mathbf{m} \left(4\delta - 10 + \frac{6}{\delta} \right) - 3 + \frac{3}{\delta} \right\}. \quad (12.1)$$

Покажем, что первые два элемента максимума в (12.1) могут быть отброшены. Для этого достаточно доказать выполнение неравенств

$$\delta > \frac{4\delta^2 - 10\delta + 6}{1 + \delta}, \quad \delta > \frac{5 - 5\delta}{\delta + 1}. \quad (12.2)$$

Оба неравенства справедливы ввиду оценки (9.5): действительно, эти неравенства приводят к соотношениям $3\delta^2 - 11\delta + 6 < 0$ или, соответственно, $\delta^2 + 6\delta - 5 > 0$, справедливым при $\delta > \frac{2}{3}$ или, соответственно, при $\delta > \sqrt{14} - 3 = 0.741\dots$

Таким образом, для проверки неравенства (12.1) остается установить, что

$$\delta(1 + \mathbf{m}) > \mathbf{m} \left(4\delta - 10 + \frac{6}{\delta} \right) - 3 + \frac{3}{\delta}. \quad (12.3)$$

После упрощения неравенство (12.3) сводится к неравенству

$$\mathbf{m} > 5 > \frac{\delta^2 + 3\delta - 3}{3\delta^2 - 10\delta + 6}, \quad (12.4)$$

справедливому ввиду неравенства (9.5): действительно, оценка (12.4) приводит к неравенству $14\delta^2 - 53\delta + 33 < 0$, справедливому при $\delta > \frac{11}{14}$.

Следовательно, система неравенств (11.14) и (11.15) относительно переменной $2\rho(1 + \mathbf{m})$ разрешима. Остается лишь применить вторую часть леммы 11.2 и теорему 11.1. Теоремы доказаны.

Список литературы

- [1] J. BOURGAIN, A. KONTOROVICH. On Zaremba's conjecture. *Annals of Math.*, 180: 1 — 60, 2014.
- [2] O. JENKINSON. On the density of Hausdorff dimensions of bounded type continued fraction sets: the Texan conjecture. *Stochastics and Dynamics*, 4 (2004), 63-76.
- [3] S. K. ZAREMBA. La méthode des "bons treillis" pour le calcul des intégrales multiples. *Applications of number theory to numerical analysis* (Montreal, Canada, 1971), pages 39-119, Academic Press, New York, 1972.
- [4] N. G. MOSHCHEVITIN. On some open problems in diophantine approximation, preprint available at arXiv:1202.4539v4
- [5] Н. М. КОРОБОВ. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. Физматгиз, М., 1963.
- [6] D. A. FROLENKOV, I. D. KAN. A reinforcement of the Bourgain—Kontorovich's theorem by elementary methods. Preprint available at arXiv: abs/1207.4546.
- [7] D. A. FROLENKOV, I. D. KAN. A reinforcement of the Bourgain—Kontorovich's theorem. Preprint available at arXiv: abs/1207.5168.
- [8] И. Д. КАН, Д. А. ФРОЛЕНКОВ. Усиление теоремы Бургейна—Конторовича. *Известия РАН. Серия математическая*. Том 78, № 2, 2014. Стр. 87-144.

- [9] D. A. FROLENKOV, I. D. KAN. A strengthening of a theorem of Bourgain-Kontorovich-II. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 2014, vol. 4, iss. 1, pp. 78-117
- [10] И. Д. КАН. Усиление теоремы Бургейна—Конторовича-III. *Известия РАН. Серия математическая*. Том 79, № 2, 2015. Стр. 77-100.
- [11] S. HUANG. AN IMPROVMENT ON ZAREMBA’S CONJECTURE. PREPRINT AVAILABLE AT [ARXIV:1303.3772v1](https://arxiv.org/abs/1303.3772v1) [MATH.NT] 14 OCT. 2013; ДОЛЖНО ПОЯВИТЬСЯ: GAFA
- [12] Р. ВОН. Метод Харди — Литтлвуда. М.: Мир, 1985. — 184 с.
- [13] M. MAGEE, H. OH, D. WINTER Expanding maps and continued fractions. Preprint available at [arXiv: 1412.4284](https://arxiv.org/abs/1412.4284) v. 1 [math. NT]